Bilateral zeta functions and their applications (Analytic Number Theory : related Multiple aspects of Arithmetic Functions)

渋川, 元樹

数理解析研究所講究録
第 1806 巻 2012 年 186-199

Bilateral zeta functions and their applications

九州大学 数理学府 渋川元樹 (Genki Shibukawa)*
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

概要

[Shib] に基づき, 新しいタイプの Barnes 型の多重ゼータ函数 (bilateral ゼータ函数) を導入し, その諸性質を Barnes ゼータ函数と比較しながら述べる. 加えて主定理として, bilateral ゼータ函数の Fourier 展開表示と, Barnes ゼータ函数を bilateral ゼータ函数の有限和で表す公式 (逆公式) を与える. 最後にその応用として, 多重化した伊関の公式を導出し, Dedekind のエータ函数の反転公式と Riemann ゼータ函数の奇数値に関する Ramanujan の公式の簡明な証明を与える.

1 Introduction

多重ゼータ函数 (Barnes ゼータ函数)

$$\zeta_r(s, z \mid \underline{\omega}) := \sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r+z)^s}$$

及び多重ガンマ函数

$$\Gamma_r(z \mid \underline{\omega}) := \exp\left(\frac{\partial\zeta_r}{\partial s}(0, z \mid \underline{\omega})\right)$$

は E. W. Barnes によって 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて導入された特殊函数である ([B1], [B2], [B3]). Barnes 自身の動機は純粋に特殊函数論的なものであり, Hurwitz ゼータ函数や通常のガンマ函数における解析接続, 函数等式等が多重ゼータ, 多重ガンマに対してどこまで parallel に成り立つのかといったことや, その応用として楕円函数ないしテータ函数を二重ガンマ函数の積で書き表すといったことが研究されている. これらの諸研究はその後しばらくの間は顧みられることはなかったが 1970 年代後半から実二次体の類体の構成問題に関係して新谷卓郎 ([Shin1]) が Barnes の研究を取り上げたことを契機に, 数論の研究者を中心として再び様々な研究が行われた. また近年では解析的差分方程式の解の構成と関連して可積分系の研究者も研究を行っている.

ところが多重ゼータ, 多重ガンマ函数は扱いやすい明示的な表示を得ることが極めて困難であり, 本質的に難しい対象であると言える. 例えば二重ガンマを用いてテータ函数やエータ函数を表示するといった事実等は [B1], [B2] 以来, [Shin2] や [KO] 等幾度も取り上げられてきたが, いずれも二重ガンマ函数の Weierstrass 積を詳細に書き下してから, それら

*g-shibukawa@math.kyushu-u.ac.jp

を掛け合わせるという方針であるためにその証明の見通しは極めて悪く, 反転公式の証明等への応用も効きにくい.

そこで Barnes ゼータ函数そのものを直接扱うのではなく, Barnes ゼータ函数の性質を保ちながら, それをより扱いやすい周期函数に拡張した bilateral ゼータ函数を導入する. 詳細は後述するが, 元の Barnes ゼータ函数 $\zeta_r(s,\, z \mid \underline{\omega})$ に, もう一つパラメータ ω_0 を付け加え, それに関して

$$\xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0;\, \underline{\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \zeta_r(s,\, z + n\omega_0 \mid \underline{\omega}).$$

のように全整数を走らせて和をとったものである. このように導入された bilateral なゼータ函数は, 解析接続, 差分関係式, 特殊値に関して元の Barnes ゼータ函数と同様の諸性質が成り立つ. しかし, bilateral ゼータ函数には周期性があることにより, $z, \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_r$ が皆上半平面にある時, 以下のような簡明な Fourier 展開表示が存在する.

$$\xi_{r+1}(s, z \mid e^{\pi i};\, \underline{\omega}) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}is}(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{s-1}e^{2\pi i n z}}{(1-e^{2\pi i n\omega_1})\cdots(1-e^{2\pi i n\omega_r})}.$$

この表示より特に,

$$\exp\left(-\frac{\partial\xi_{r+1}}{\partial s}(0, z \mid e^{\pi i};\, \underline{\omega})\right) = \prod_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r+z)}),$$

のように q-shifted factorial が bilateral ゼータ函数を用いて書けることがわかる. これは Barnes ゼータ函数の微分の零値が多重ガンマ函数で, その明示的な表示が極めて複雑であったこととは対照的な結果であり, これによって特殊函数論的な命題への応用が, Barnes ゼータ函数よりも遥かに容易になる.

また bilateral ゼータ函数は Barnes ゼータ函数で書けた (定義された) が, パラメータと変数に適当な制限を課すことで, 逆に Barnes ゼータ函数を bilateral ゼータ函数のみを用いて書くことが出来る. つまりある条件下では bilateral ゼータ函数は Barnes ゼータ函数を復元するので, 扱いやすい bilateral ゼータ函数の方がより primitive な対象だと考えられる.

2 Definition

以下特に断らない限り任意の複素数 c について, その偏角を

$$-\pi < \arg c \leq \pi.$$

特に $\arg 0 := 0$ としておく. 更に以下のような諸記号を導入する.

$$\begin{aligned} i :=& \sqrt{-1}, \\ \mathbb{C}^* :=& \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \mathfrak{H} :=& \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}, \\ \underline{\omega} :=& (\omega_1, \cdots, \omega_r) \in \mathbb{C}^r. \end{aligned}$$

まず Barnes の多重ゼータ函数を導入する.

Definition 2.1. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $s, z, \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_r \in \mathbb{C}$ とする. この時 $r+1$ 重の Barnes ゼータ函数 $\zeta_{r+1}(s, z \mid \omega_0, \underline{\omega})$ を以下の級数で定義する.

$$\zeta_{r+1}(s, z \mid \omega_0, \underline{\omega}) := \sum_{m_0 \geq 0} \sum_{m_1, \cdots, m_r \geq 0} \frac{1}{(z + m_0\omega_0 + m_1\omega_1 + \cdots + m_r\omega_r)^s}. \tag{2.1}$$

但しこの級数が絶対収束するために, $\Re(s) > r+1$ とし, $z, \omega_0, \underline{\omega}$ は以下の片側条件 ([**OC**]) を満たすとする.

$$\max\{\arg(z), \arg(\omega_0), \arg(\omega_1), \cdots, \arg(\omega_r)\} \\ - \min\{\arg(z), \arg(\omega_0), \arg(\omega_1), \cdots, \arg(\omega_r)\} < \pi.$$

以下, Barnes ゼータ函数を考える時は, 常に $z, \omega_0, \underline{\omega}$ について片側条件 (one-side condition[**OC**]) が成立するとしておき, また便宜的に

$$\zeta_0(s, z) := z^{-s}. \tag{2.2}$$

としておく.

次いで bilateral ゼータ函数を導入する.

Definition 2.2. $\Re(s) > r+1$, $0 < \arg(\omega_0) \leq \pi$ とし, 変数 z とパラメータ $\omega_0, \underline{\omega}$ に関して以下の強片側条件 (strong one-side condition[**SOC**]) が成り立つとする.

$$0 \leq \arg(z) \leq \pi, \quad 0 < \arg(\omega_j) < \pi \ (1 \leq j \leq r).$$

この時 $r+1$ 重の bilateral ゼータ函数 $\xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0; \underline{\omega})$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0; \underline{\omega}) :=& \zeta_{r+1}(s, z + \omega_0 \mid \omega_0, \underline{\omega}) + \zeta_{r+1}(s, z \mid -\omega_0, \underline{\omega}) \\ =& \sum_{m_0 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_1, \cdots, m_r \geq 0} \frac{1}{(z + m_0\omega_0 + m_1\omega_1 + \cdots + m_r\omega_r)^s} \\ =& \sum_{m_0 \in \mathbb{Z}} \zeta_r(s, z + m_0\omega_0 \mid \underline{\omega}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

以下, bilateral ゼータ函数を考える時は, 常に $z, \omega_0, \underline{\omega}$ について強片側条件 (strong one-side condition[**SOC**]) が成立するとしておく.

3 Properties of the Barnes and bilateral zeta functions

以下, Barnes ゼータ函数と bilateral ゼータ函数を対比させながら, その諸性質を, 証明なしで, 述べていく.

Proposition 3.1. (解析性) (1) $r+1$ 重ゼータ函数 $\zeta_{r+1}(s, z \mid \omega_0, \underline{\omega})$ は s の有理型函数として全 s 平面に解析接続される. 特に $\zeta_{r+1}(s, z \mid \omega_0, \underline{\omega})$ の極は全て一位であり, $s = 1, 2, \cdots, r+1$ のみである.
(2) bilateral $r+1$ 重ゼータ函数 $\xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0; \underline{\omega})$ は s の正則函数として全 s 平面に解析接続される.

Proposition 3.2. (差分関係式) (1) $k=1,\cdots,r$ について,

$$\zeta_r(s,z+\omega_k\mid\underline{\omega})=\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})-\zeta_{r-1}(s,z\mid\widehat{\underline{\omega}}(k)). \tag{3.1}$$

但し, $\widehat{\underline{\omega}}(j):=(\omega_1,\cdots,\widehat{\omega}_j,\cdots,\omega_r)$.
(2) bilateral $r+1$ 重ゼータ函数 ξ_{r+1} は ω_0 について以下のように周期性を持つ.

$$\xi_{r+1}(s,z+\omega_0\mid\omega_0;\underline{\omega})=\xi_{r+1}(s,z\mid\omega_0;\underline{\omega}). \tag{3.2}$$

また $k=1,\cdots,r$ について,

$$\xi_{r+1}(s,z+\omega_k\mid\omega_0;\underline{\omega})=\xi_{r+1}(s,z\mid\omega_0;\underline{\omega})-\xi_r(s,z\mid\omega_0;\widehat{\underline{\omega}}(k)). \tag{3.3}$$

Proposition 3.3. (乗法性) (1) $\alpha\in\mathbb{C}^*$ が以下の条件を満たすとする.

$$-\pi<\arg(\alpha)+\arg(z),\quad \arg(\alpha)+\arg(\omega_j)\le\pi\ (1\le j\le r),$$

この時, 次が成立する.

$$\zeta_r(s,\alpha z\mid\alpha\underline{\omega})=\alpha^{-s}\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega}). \tag{3.4}$$

(2) $\alpha\in\mathbb{C}^*$ が以下の条件を満たすとする.

$$0<\arg(\alpha)+\arg(z),\quad \arg(\alpha)+\arg(\omega_j)\le\pi\ (1\le j\le r),$$

この時, 次が成立する.

$$\xi_{r+1}(s,\alpha z\mid\alpha\omega_0;\alpha\underline{\omega})=\alpha^{-s}\xi_{r+1}(s,z\mid\omega_0;\underline{\omega}). \tag{3.5}$$

Proposition 3.4. (非正整数における特殊値) (1) 多重 Bernoulli 多項式 $B_{r,k}(z\mid\underline{\omega})$ を以下の母函数で定義する.

$$\frac{t^re^{zt}}{(e^{\omega_1t}-1)\cdots(e^{\omega_rt}-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{r,k}(z\mid\underline{\omega})\frac{t^k}{k!}.$$

この時, 任意の $m\in\mathbb{N}$ について次が成立する.

$$\zeta_r(1-m,\,z\mid\underline{\omega})=(-1)^r\frac{(m-1)!}{(m+r-1)!}B_{r,r+m-1}(z\mid\underline{\omega}).\ (). \tag{3.6}$$

(2) 任意の $m\in\mathbb{N}$ について次が成立する.

$$\xi_{r+1}(1-m,z\mid\omega_0;\underline{\omega})=0.\ (m\in\mathbb{N}). \tag{3.7}$$

Remark 3.5. Barnes ゼータ函数は 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて, Barnes により導入された ([B1], [B2], [B3]). 上で述べた Barnes ゼータ函数の諸性質は全て Barnes 自身によって示されている.

上で併記した Barnes 及び bilateral ゼータ函数の諸結果を比べてみると, 両者は互いに似た性質を有していることがわかる. その一方で, Barnes ゼータ函数に周期性を持たせた bilateral ゼータ函数の方が, 簡明でより良い性質を持っていることもわかる. 以下では, bilateral ゼータ函数に固有の Fourier 展開と, Barnes ゼータ函数との対応についてみてゆく.

4 Fourier expansion and inversion expression

4.1 Fourier expansion of the bilateral zeta function

上述したように, $\xi_{r+1}(s,z \mid e^{\pi i};\underline{\omega})$ は周期性を有するので, 以下のように Fourier 展開できる.

Theorem 4.1. $z,\omega_1,\cdots,\omega_r \in \mathfrak{H}$ とする. 任意の $s\in\mathbb{C}$ について,

$$\xi_{r+1}(s,z \mid e^{\pi i};\underline{\omega}) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}is}(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s-1}e^{2\pi inz}}{(1-e^{2\pi in\omega_1})\cdots(1-e^{2\pi in\omega_r})}. \tag{4.1}$$

この公式自体は, $\cot(\pi z)$ の部分分数分解の一般化である, Lipschitz の公式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+z)^s} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}is}(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e^{2\pi inz} \quad (z\in\mathfrak{H},\ \Re(s)>1). \tag{4.2}$$

より直ちに得られる. 言い換えると, (4.1) は Lipschitz の公式の多重化である.

この系として, Lambert 級数や q-shifted factorial との対応を与えることが出来る. 具体的には bilateral ゼータ函数の s についての微分の特殊値がそれにあたる.

Corollary 4.2. 先の定理と同じく, $z,\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathfrak{H}$ とする. この時任意の $m\in\mathbb{N}$ について,

$$\frac{\partial\xi_{r+1}}{\partial s}(1-m,z \mid e^{\pi i};\underline{\omega}) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^{m-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{n^m(1-e^{2\pi in\omega_1})\cdots(1-e^{2\pi in\omega_r})}. \tag{4.3}$$

特に $z,\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathfrak{H}$ について

$$\exp\left(-\frac{\partial\xi_{r+1}}{\partial s}(0,z \mid e^{\pi i};\underline{\omega})\right) = \prod_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r+z)}). \tag{4.4}$$

証明は, $\xi_{r+1}(s,z \mid e^{\pi i};\underline{\omega})$ の非正整数の特殊値が 0 になること (3.7) に注意して, (4.3) の表示を微分すれば直ちに得られる.

4.2 Inversion expression

以下特に断らない限り, $r\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ とし, $\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathfrak{H}$ が以下のような order condition([ORC]) を満たすとする.

$$\arg(\omega_j) < \arg(\omega_k)(1\leq j<k\leq r) \tag{4.5}$$

bilateral ゼータ函数の定義を思い出そう.

$$\xi_{r+1}(s,z \mid \omega_0;\underline{\omega}) := \zeta_{r+1}(s,z+\omega_0 \mid \omega_0,\underline{\omega}) + \zeta_{r+1}(s,z \mid -\omega_0,\underline{\omega}),$$

つまり $r+1$ 重の bilateral ゼータ函数とは, 二つの $r+1$ 重 Barnes ゼータ函数の和で書けて (定義されて) いた. しかし逆に r 重 Barnes ゼータ函数を $2r$ 個の r 重 bilateral ゼータ函数で逆に表示することが出来る.

Theorem 4.3. (逆表示)

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z = \sum_{k=1}^{r} a_k \omega_k \ (0 < a_1, \cdots, a_r < 1) \right\}.$$

$$\begin{aligned} z_k &:= z/\omega_k, \\ \omega_{jk} &:= \omega_j/\omega_k, \\ c\underline{\omega} &:= (c\omega_1, \cdots, c\omega_r)\,(c \in \mathbf{C}), \\ \widehat{\underline{\omega}}_k^-[1, k-1] &:= (-\omega_{1,k}, -\omega_{2,k}, \cdots, -\omega_{k-1,k}, \omega_{k+1,k}, \cdots, \omega_{r,k}), \\ |\underline{\omega}_k|_{[1,k-1]}^+ &:= \omega_{1,k} + \cdots + \omega_{k-1,k}, \\ |\underline{\omega}_k|_{[k+1,r]}^+ &:= \omega_{k+1,k} + \cdots + \omega_{r,k}. \end{aligned}$$

として, $z \in D$ とする. 任意の $s \in \mathbb{C}$ について次が成立する.

$$\begin{aligned} \zeta_r(s, z \mid \underline{\omega}) = \frac{1}{2i\sin(\pi s)} & \\ \cdot \Bigg\{ \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_k}\right)^s & \xi_r(s, z_k - |\underline{\omega}_k|_{[1,k-1]}^+ \mid e^{\pi i}; \widehat{\underline{\omega}}_k^-[1, k-1]) \\ - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \left(\frac{1}{\omega_k}\right)^s & \xi_r(s, -z_k + |\underline{\omega}_k|_{[k+1,r]}^+ \mid e^{\pi i}; \widehat{\underline{\omega}}_k^-[1, k-1]) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Example 4.4 ($r = 2$).

$$\begin{aligned} \zeta_2(s, z \mid \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2i\sin(\pi s)} \\ &\quad \cdot \{\{\xi_2(s, -z \mid \omega_1; -\omega_2) - \xi_2(s, \omega_1 - z \mid \omega_2; \omega_1)\} \\ &\quad + e^{-\pi i s}\{\xi_2(s, z - \omega_2 \mid \omega_1; -\omega_2) - \xi_2(s, z \mid \omega_2; \omega_1)\}\} \\ &= \frac{1}{2i\sin(\pi s)} \\ &\quad \cdot \left\{ \left\{ \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_1}\right)^s \xi_2(s, z_1 \mid e^{\pi i}; \omega_{2,1}) - \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_2}\right)^s \xi_2(s, z_2 - \omega_{1,2} \mid e^{\pi i}; -\omega_{1,2}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^s \xi_2(s, -z_1 + \omega_{2,1} \mid e^{\pi i}; \omega_{2,1}) - \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^s \xi_2(s, -z_2 \mid e^{\pi i}; -\omega_{1,2}) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Remark 4.5. $r = 1$ の時は, $\omega_1 \in \mathfrak{H}, \Re(s) < 0, z = a\omega_1 (0 < a < 1)$ とすると,

$$\begin{aligned} \zeta_1(s, z \mid \omega_1) &= \frac{1}{2i\sin(\pi s)} \{\xi_1(s, z \mid \omega_1) - e^{-\pi i s}\xi_1(s, -z \mid \omega_1)\} \\ &= \frac{1}{2i\sin(\pi s)} \left\{ \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_1}\right)^s \xi_1(s, z_1 \mid e^{\pi i}) - \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^s \xi_1(s, -z_1 \mid e^{\pi i}) \right\}. \end{aligned}$$

$$\xi_1(s, z \mid \omega_1) = \zeta_1(s, z + \omega_1 \mid \omega_1) + \zeta_1(s, z \mid -\omega_1).$$

となっている.

定理を証明するために, 以下のような逆表示の「半分」を証明する.

Lemma 4.6.

$$\begin{aligned}
D_+ &:= \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(\omega_r) < \arg(z) < \pi\},\\
D_- &:= \{z \in \mathbb{C}^* \mid 0 < \arg(z) < \arg(\omega_1)\},\\
|\underline{\omega}|^+ &:= \omega_1 + \cdots + \omega_r,\\
f_+(s,z \mid \underline{\omega}) &:= \zeta_r(s,-z \mid -\underline{\omega}) + (-1)^{r-1}\zeta_r(s,|\underline{\omega}|^+ - z \mid \underline{\omega}),\\
f_-(s,z \mid \underline{\omega}) &:= \zeta_r(s,z \mid \underline{\omega}) + (-1)^{r-1}\zeta_r(s,z - |\underline{\omega}|^+ \mid -\underline{\omega}).
\end{aligned}$$

とする.

(1) $z \in D \cup D_+$ の時, 任意の $s \in \mathbb{C}$ について,

$$f_+(s,z \mid \underline{\omega}) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_k}\right)^s \xi_r(s, z_k - |\underline{\omega}_k|^+_{[1,k-1]} \mid e^{\pi i}; \widehat{\underline{\omega}}_k^-[1,k-1]). \tag{4.7}$$

(2) $z \in D \cup D_-$ の時, 任意の $s \in \mathbb{C}$ について,

$$f_-(s,z \mid \underline{\omega}) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_k}\right)^s \xi_r(s, -z_k + |\underline{\omega}_k|^+_{[k+1,r]} \mid e^{\pi i}; \widehat{\underline{\omega}}_k^-[1,k-1]). \tag{4.8}$$

表記が煩わしいので以下では $r = 3$ に限って証明するが, 一般の場合にも同様に証明できる.

Proof. (1) $z \in D \cup D_+$ とする. この時 $f_+(s,z \mid \underline{\omega})$ に, 以下のように差引き零になるように, いくつかの Barnes ゼータ函数を挿入して, 与式を bilateral ゼータ函数に書き直してゆく.

$$\begin{aligned}
&f_+(s,z \mid \underline{\omega})\ (= \zeta_3(s,-z \mid -\omega_1,-\omega_2,-\omega_3) + \zeta_3(s,|\underline{\omega}|^+ - z \mid \underline{\omega}))\\
&= \{\zeta_3(s,-z \mid -\omega_1,-\omega_2,-\omega_3) + \zeta_3(s,\omega_1 - z \mid \omega_1,-\omega_2,-\omega_3)\}\\
&- \{\zeta_3(s,\omega_1 - z \mid \omega_1,-\omega_2,-\omega_3) + \zeta_3(s,\omega_1+\omega_2 - z \mid \omega_1,\omega_2,-\omega_3)\}\\
&+ \{\zeta_3(s,\omega_1+\omega_2 - z \mid \omega_1,\omega_2,-\omega_3) + \zeta_3(s,|\underline{\omega}|^+ - z \mid \underline{\omega})\}\\
&= \xi_3(s,-z \mid \omega_1;-\omega_2,-\omega_3) - \xi_3(s,\omega_1 - z \mid \omega_2;\omega_1,-\omega_3) + \xi_3(s,\omega_1+\omega_2 - z \mid \omega_3;\omega_1,\omega_2)\\
&= \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_1}\right)^s \xi_3(s,z_1 \mid e^{\pi i};\omega_{21},\omega_{31}) - \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_2}\right)^s \xi_3(s,z_2 - \omega_{12} \mid e^{\pi i};-\omega_{12},\omega_{32})\\
&+ \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_3}\right)^s \xi_3(s,z_3 - \omega_{13} - \omega_{23} \mid e^{\pi i};-\omega_{13},-\omega_{23}).
\end{aligned}$$

ここで変数が $z \in D \cup D_+$ であり, 各パラメータ ω_k が [ORC] を満たしていることより, 上で出てきた全ての Barnes ゼータ函数及び bilateral ゼータ函数が皆 [OC] と [SOC] を満たし well-defined であること, 及び bilateral ゼータ函数の乗法性 (3.5) が使えることに注意せよ.

(2) $f_-(s,z\mid\underline{\omega})$ の場合も, $z\in D\cup D_-$ として $f_+(s,z\mid\underline{\omega})$ と同様に, 適当に Barnes ゼータ函数を挿入して証明すればよい.

$$
\begin{aligned}
&f_-(s,z\mid\underline{\omega})\,(=\zeta_3(s,z\mid\omega_1,\omega_2,\omega_3)+\zeta_3(s,z-|\underline{\omega}|^+\mid-\underline{\omega})\,)\\
&=\{\zeta_3(s,z\mid\omega_1,\omega_2,\omega_3)+\zeta_3(s,z-\omega_3\mid\omega_1,\omega_2,-\omega_3)\}\\
&-\{\zeta_3(s,z-\omega_3\mid\omega_1,\omega_2,-\omega_3)+\zeta_3(s,z-\omega_2-\omega_3\mid\omega_1,-\omega_2,-\omega_3)\}\\
&+\{\zeta_3(s,z-\omega_2-\omega_3\mid\omega_1,-\omega_2,-\omega_3)+\zeta_3(s,z-|\underline{\omega}|^+\mid-\underline{\omega})\}\\
&=\xi_3(s,z\mid\omega_3;\omega_1,\omega_2)-\xi_3(s,z-\omega_3\mid\omega_2;\omega_1,-\omega_3)+\xi_3(s,z-\omega_2-\omega_3\mid\omega_1;-\omega_2,-\omega_3)\\
&=\left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_3}\right)^s\xi_3(s,-z_3\mid e^{\pi i};-\omega_{13},-\omega_{23})-\left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_2}\right)^s\xi_3(s,-z_2+\omega_{32}\mid e^{\pi i};-\omega_{12},\omega_{32})\\
&+\left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_1}\right)^s\xi_3(s,-z_1+\omega_{21}+\omega_{31}\mid e^{\pi i};\omega_{21},\omega_{31}).
\end{aligned}
$$

□

この補題を用いて逆表示を証明する.

Proof.

$$F(s,z\mid\underline{\omega}):=f_+(s,z\mid\underline{\omega})-e^{-\pi is}f_-(s,z\mid\underline{\omega})$$

とおく. $z\in D$ とすると, (4.7) と (4.8) の表示が使えるので,

$$
\begin{aligned}
F(s,z\mid\underline{\omega})=&\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_k}\right)^s\xi_r(s,z_k+e^{\pi i}|\underline{\omega}_k|^+_{[1,k-1]}\mid e^{\pi i};\widehat{\underline{\omega}}_k^-[1,k-1])\\
&-\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-k}\left(\frac{1}{\omega_k}\right)^s\xi_r(s,e^{\pi i}z_k+|\underline{\omega}_k|^+_{[k+1,r]}\mid e^{\pi i};\widehat{\underline{\omega}}_k^-[1,k-1]).
\end{aligned}
$$

他方で $f_+(s,z\mid\underline{\omega})$ と $f_-(s,z\mid\underline{\omega})$ の定義より,

$$
\begin{aligned}
F(s,z\mid\underline{\omega})&=(e^{\pi is}-e^{-\pi is})\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})\\
&\quad+(-1)^{r-1}(\zeta_r(s,|\underline{\omega}|^+-z\mid\underline{\omega})-e^{-\pi is}\zeta_r(s,z-|\underline{\omega}|^+\mid e^{-\pi i}\underline{\omega}))\\
&=(e^{\pi is}-e^{-\pi is})\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})=2i\sin(\pi s)\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega}).
\end{aligned}
$$

よって結論を得る. □

この逆表示の系として Barnes ゼータ函数の Fourier 展開表示が得られる.

Corollary 4.7 ([KMT]). $z\in D$ とする. 任意の $s\in\mathbb{C}$ について,

$$
\begin{aligned}
&\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})=(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\\
&\quad\cdot\left\{e^{\frac{\pi}{2}i(s-1)}\sum_{k=1}^{r}\omega_k^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e^{2\pi inz_k}\left\{\prod_{j\neq k}(1-e^{2\pi in\omega_{jk}})\right\}^{-1}\right.\\
&\quad\left.+e^{-\frac{\pi}{2}i(s-1)}\sum_{k=1}^{r}\omega_k^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e^{-2\pi inz_k}\left\{\prod_{j\neq k}(1-e^{-2\pi in\omega_{jk}})\right\}^{-1}\right\}. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Example 4.8 ($r = 2$).

$$\begin{aligned}\zeta_2(s, z \mid \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2i\sin(\pi s)} \\ &\quad \cdot \left\{ e^{\pi i s} \left\{ \omega_1^{-s} \xi_2(s, z_1 \mid e^{\pi i}; \omega_{2,1}) - \omega_2^{-s} \xi_2(s, z_2 - \omega_{1,2} \mid e^{\pi i}; -\omega_{1,2}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \omega_1^{-s} \xi_2(s, -z_1 + \omega_{2,1} \mid e^{\pi i}; \omega_{2,1}) - \omega_2^{-s} \xi_2(s, -z_2 \mid e^{\pi i}; -\omega_{1,2}) \right\} \right\}. \\ &= (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \\ &\quad \cdot \left\{ e^{\frac{\pi}{2}i(s-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \left\{ \omega_1^{-s} \frac{e^{2\pi i n z_1}}{1 - e^{2\pi i n \omega_{2,1}}} + \omega_2^{-s} \frac{e^{2\pi i n z_2}}{1 - e^{2\pi i n \omega_{1,2}}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\pi}{2}i(s-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \left\{ \omega_1^{-s} \frac{e^{-2\pi i n z_1}}{1 - e^{-2\pi i n \omega_{2,1}}} + \omega_2^{-s} \frac{e^{-2\pi i n z_2}}{1 - e^{-2\pi i n \omega_{1,2}}} \right\} \right\}\end{aligned}$$

Remark 4.9. $r = 1$ の時は, $\Re(s) < 0$ and $z = a\omega_1 (0 < a < 1)$ とすると, 次が成立している.

$$\begin{aligned}\zeta_1(s, z \mid \omega_1) &= \frac{1}{2i\sin(\pi s)} \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\frac{e^{\pi i}}{\omega_1} \right)^s \xi_1(s, a \mid e^{\pi i}) - \left(\frac{1}{\omega_1} \right)^s \xi_1(s, -a \mid e^{\pi i}) \right\} \\ &= (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \omega_1^{-s} \\ &\quad \cdot \left\{ e^{\frac{\pi}{2}i(s-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{2\pi i n a} + e^{-\frac{\pi}{2}i(s-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{-2\pi i n a} \right\}.\end{aligned}$$

これはよく知られた Hurwitz ゼータ函数についての Hurwitz の公式である. 実際, [KR] はこの方法で Hurwitz の公式を証明している. 我々の命題 4.7 の証明は [KR] の多重化になっている.

5 Applications

以上で示した bilateral ゼータ函数の性質を用いていくつかの命題を証明する.

5.1 Multiple Iseki's formula

Proposition 5.1. 任意の $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $z \in D$ について, 次が成立する.

$$\begin{aligned}&(-1)^{r+1} \pi i \frac{(2N)!}{(2N+r)!} B_{r,r+2N}(z \mid \underline{\omega}) \\ &\quad + \frac{(-1)^N (2N)!}{(2\pi)^{2N}} \sum_{k=1}^{r} \omega_k^{2N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n z_k}}{n^{2N+1}} \prod_{j=1, j\neq k}^{r} (1 - e^{2\pi i n \omega_{jk}})^{-1} \\ =&(-1)^r \pi i \frac{(2N)!}{(2N+r)!} B_{r,r+2N}(z \mid \underline{\omega}) \\ &\quad + \frac{(-1)^N (2N)!}{(2\pi)^{2N}} \sum_{k=1}^{r} \omega_k^{2N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n z_k}}{n^{2N+1}} \prod_{j=1, j\neq k}^{r} (1 - e^{-2\pi i n \omega_{jk}})^{-1}. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Proof. $f(s,z\mid \underline{\omega}):=\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})+(-1)^{r-1}\zeta_r(s,|\underline{\omega}|^+-z\mid\underline{\omega})$ とおくと, Barnes ゼータ函数の乗法性 (3.4) を使って,

$$\begin{aligned}f(s,z\mid\underline{\omega})&=e^{-\pi is}\zeta_r(s,-z\mid-\underline{\omega})+(-1)^{r-1}\zeta_r(s,|\underline{\omega}|^+-z\mid\underline{\omega})\\&=\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})+(-1)^{r-1}e^{-\pi is}\zeta_r(s,z-|\underline{\omega}|^+\mid-\underline{\omega}).\end{aligned}$$

という二通りの表示が得られ, これを微分して,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s}(-2N,z\mid\underline{\omega})&=-\pi i\zeta_r(-2N,-z\mid-\underline{\omega})+\frac{\partial f_+}{\partial s}(-2N,z\mid\underline{\omega})\\&=-\pi i(-1)^{r-1}\zeta_r(-2N,z-|\underline{\omega}|^+\mid-\underline{\omega})+\frac{\partial f_-}{\partial s}(-2N,z\mid\underline{\omega}).\end{aligned}$$

$z\in D$ であるので, (4.7) と (4.8), 及び (4.3) を用いて結論を得る. □

Remark 5.2. (1) $r=2,N=0$ の場合は,

$$\begin{aligned}&\frac{-\pi i}{2}B_{2,2}(z\mid\omega_1,\omega_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz_1}}{n(1-e^{2\pi in\omega_{21}})}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz_2}}{n(1-e^{2\pi in\omega_{12}})}\\=&\frac{\pi i}{2}B_{2,2}(z\mid\omega_1,\omega_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inz_1}}{n(1-e^{-2\pi in\omega_{21}})}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inz_2}}{n(1-e^{-2\pi in\omega_{12}})}.\end{aligned}$$

ここで $\omega_1=1,\omega_2=\tau\in\mathfrak{H}$ とすると, これはテータ函数

$$\theta(z\mid\tau):=\prod_{m=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(-z+(m+1)\tau)})(1-e^{2\pi i(z+m\tau)})$$

の反転公式

$$\theta\left(-\frac{z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=e^{\pi iB_{2,2}(z|1,\tau)}\theta(z\mid\tau).$$

である.
$r=3,N=0$ の場合は, 同様にして, $\omega_1=1,\omega_2=\tau,\omega_3=\sigma\in\mathfrak{H}(\Im(\sigma)>\Im(\tau))$ とすると, これは [FV] による楕円ガンマ函数 (ガンマ函数の楕円類似),

$$\Gamma(z\mid\tau,\sigma):=\frac{\prod_{m,n=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(-z+(m+1)\tau+(n+1)\sigma)})}{\prod_{m,n=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(z+m\tau+n\sigma)})}$$

の反転公式

$$\Gamma\left(-\frac{z}{\sigma}\middle|-\frac{1}{\sigma},-\frac{\tau}{\sigma}\right)=e^{\frac{\pi i}{3}B_{3,3}(z|1,\tau,\sigma)}\Gamma(z\mid\tau,\sigma)\,\Gamma\left(\frac{\sigma-z}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau},\frac{\sigma}{\tau}\right)^{-1}.$$

である.
一般に $r\in\mathbb{Z}_{\geq 2},N=0$ の場合は, [Nar] による多重楕円ガンマ函数 ([Nis] により導入された多重ガンマ函数の楕円類似) の反転公式である.
(2) $r=2,N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合は [I] による一般化されたテータ函数 (Lambert 級数) の反転公式にあたる. つまり命題 5.1 は, 伊関の公式の多重化にあたる.

5.2 Inversion formula for the Dedekind η-function and Ramanujan's formula

$\tau \in \mathfrak{H}$とする.

Proposition 5.3. (1) (Inversion formula for the Dedekind η-function)
Dedekindのη函数

$$\eta(\tau) := e^{\frac{\pi i}{12}\tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau}), \tag{5.2}$$

について次の反転公式が成立する.

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau). \tag{5.3}$$

但し$\sqrt{\frac{\tau}{i}}$の分枝は$\tau = i$で1となるようにとる.
(2) (Ramanujan's formula)
任意の$N \in \mathbb{N}$について, 次が成立する.

$$\begin{aligned} &\tau^{2N}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2N+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2N+1}} \frac{e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}}{1 - e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}}\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{2}\zeta(2N+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2N+1}} \frac{e^{2\pi i n\tau}}{1 - e^{2\pi i n\tau}}\right\} - \frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2N+1}}{(2N+2)!} B_{2,2+2N}(0 \mid \tau, 1). \end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで$\zeta(s)$はRiemannゼータ函数である.
(3) (Inversion formula for the Eisenstein series/Lambert series)
任意の$N \in \mathbb{N}$について, 次が成立する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2N-1} e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}}{1 - e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}} - \frac{B_{2N}}{4N} = \tau^{2N}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2N-1} e^{2\pi i n\tau}}{1 - e^{2\pi i n\tau}} - \frac{B_{2N}}{4N}\right\} - \frac{\tau}{4\pi i}\delta_{1,N}. \tag{5.5}$$

$g(s,\tau)$を以下のように置く.

$$g(s,\tau) := \xi_2(s, \tau \mid e^{\pi i}; \tau) - \left(e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)^s \xi_2\left(s, -\frac{1}{\tau} \,\middle|\, e^{\pi i}; -\frac{1}{\tau}\right) \tag{5.6}$$

一方でbilateralゼータ函数の定義より, $g(s,\tau)$は

$$g(s,\tau) = \zeta_2(s, \tau \mid e^{\pi i}, \tau) - e^{\pi i s}\zeta_2(s, e^{\pi i} \mid \tau, e^{\pi i}).$$

というBarnesゼータ函数の表示がある. 上の命題を証明するにはこの二つの異なる表示それぞれに関して特殊値を計算すればよい. bilateralゼータ函数側の表示の方は, (3.7)と(4.3)より直ちに得られる. Barnesゼータ函数側の表示の方を計算するのには以下の補題を用いる.

Lemma 5.4. (1) 任意の$s \in \mathbb{C}$について, 次が成立する.

$$\zeta_2(s, \omega_1 \mid \omega_1, \omega_2) - \zeta_2(s, \omega_2 \mid \omega_1, \omega_2) = (\omega_1^{-s} - \omega_2^{-s})\zeta(s). \tag{5.7}$$

(2) 任意の $N \in \mathbb{N}$ について, 次が成立する.

$$\lim_{s\to 2N}(1-e^{\pi i s})\zeta_2(s,z\mid\omega_1,\omega_2) = -\frac{\pi i}{\omega_1\omega_2}\delta_{1,N}. \tag{5.8}$$

但し, $\delta_{1,N}$ は Kronecker のデルタである.

Proposition 5.5. (1)

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,\tau) = -\frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{2}\log\tau. \tag{5.9}$$

(2) 任意の $N \in \mathbb{N}$ について, 次が成立する.

$$\frac{\partial g}{\partial s}(-2N,\tau) = \frac{\pi i B_{2,2+2N}(0\mid 1,\tau)}{(2N+2)(2N+1)} + \frac{(-1)^N}{2}(\tau^{2N}-1)(2N)!(2\pi)^{-2N}\zeta(2N+1). \tag{5.10}$$

(3) 任意の $N \in \mathbb{N}$ について, 次が成立する.

$$g(2N,\tau) = (\tau^{-2N}-1)\left(-\frac{1}{2}\frac{B_{2N}}{(2N)!}(2\pi i)^{2N}\right) + \frac{\pi i}{\tau}\delta_{1,N}. \tag{5.11}$$

Proof. (1)(5.7) と (3.6) を用いて, $g(s,\tau)$ の Barnes ゼータ函数の表示の微分の特殊値を計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial s}(0,\tau) &= \frac{\partial}{\partial s}\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau) - e^{\pi i s}\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}\Big|_{s=0} \\
&= -\pi i\zeta_2(0,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i}) + \frac{\partial}{\partial s}\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau) - \zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}\Big|_{s=0} \\
&= -\pi i\frac{B_{2,2}(e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})}{2!} + \frac{\partial}{\partial s}\{(\tau^{-s}-e^{-\pi i s})\zeta(s)\}\Big|_{s=0} \\
&= -\frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{12}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{2}\log\tau.
\end{aligned}$$

(2) 同様にして,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial s}(-2N,\tau) &= -\pi i\zeta_2(-2N,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i}) + \frac{\partial}{\partial s}\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau) - \zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}\Big|_{s=-2N} \\
&= -\pi i\frac{B_{2,2+2N}(e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})}{(2N+2)(2N+1)} + \frac{\partial}{\partial s}\{(\tau^{-s}-e^{-\pi i s})\zeta(s)\}\Big|_{s=-2N} \\
&= \frac{\pi i B_{2,2+2N}(0\mid 1,\tau)}{(2N+2)(2N+1)} + (\tau^{2N}-1)\frac{\partial\zeta}{\partial s}(-2N) \\
&= \frac{\pi i B_{2,2+2N}(0\mid 1,\tau)}{(2N+2)(2N+1)} + \frac{(-1)^N}{2}(\tau^{2N}-1)(2N)!(2\pi)^{-2N}\zeta(2N+1).
\end{aligned}$$

但し最後の等式で Riemann ゼータ函数の函数等式

$$\zeta(s) = 2\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s),$$

とその微分

$$\frac{\partial\zeta}{\partial s}(-2N)=\frac{(-1)^N}{2}(2N)!(2\pi)^{-2N}\zeta(2N+1),$$

を用いた.
(3) (5.8) を用いると,

$$\begin{aligned}
g(2N,\tau) &= \lim_{s\to 2N}\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)-e^{\pi is}\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}\\
&= \lim_{s\to 2N}\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)-\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}+\lim_{s\to 2N}(1-e^{\pi is})\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\\
&= \lim_{s\to 2N}\{(\tau^{-s}-e^{-\pi is})\zeta(s)\}+\lim_{s\to 2N}(1-e^{\pi is})\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\\
&= (\tau^{-2N}-1)\left(-\frac{1}{2}\frac{B_{2N}}{(2N)!}(2\pi i)^{2N}\right)+\frac{\pi i}{\tau}\delta_{1,N}.
\end{aligned}$$

□

この結果と bilateral ゼータ函数側の表示の特殊値の計算とを合わせて, 命題 5.3 を得る.

6 Concluding Remarks

bilateral ゼータ函数の基本的な性質とその応用について述べてきた. bilateral ゼータ函数は元となった Barnes ゼータ函数と同様の性質を有しながらも, 様々な面で扱いやすく, 特に種々の特殊函数論的命題への応用が Barnes ゼータ函数を用いるよりも簡単であった. しかしパラメータに Barnes ゼータ函数よりも強い制限がかかっているので, 例えば複数のパラメータを実数に制限できないために数論的命題への応用は難しいという困難もある (逆表示の適応範囲外のケースとなる). この点を改良して bilateral ゼータ函数の適用範囲を更に広げることが望ましいが現段階では成功していない.
他方 Barnes ゼータ函数以外にも, bilateral 化を考えることができ, そのようにして他に有益なゼータ函数が得られるかは検討する価値があると思われる.

参考文献

[B1] E. W. Barnes: The Genesis of the Double Gamma Functions, Proc. London Math. Soc. s1-31 (1899), 358-381.

[B2] E. W. Barnes: The Theory of the Double Gamma Function, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character (The Royal Society) 196 (1901) 265-387.

[B3] E. W. Barnes: On the theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374-425.

[FV] G. Felder and A. Varchenko: The elliptic gamma function and $SL(3,\mathbf{Z})\ltimes\mathbf{Z}^3$, Advances in Math. 156 (1) (2000), 44-76.

[I] S. Iseki: The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations, Duke Math. J. 24 (1957), 653-662.

[KO] K. Katayama and M. Ohtsuki: On the Multiple Gamma-Functions, Tokyo J. Math 21 (1998), no.1 159-182.

[KMT] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura: Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, arXiv:1006.3336.

[KR] M. Knopp and S. Robins: Easy proofs of Riemann's functional equation for $\zeta(s)$ and of Lipschitz summation, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no.7 1915-1922.

[Nar] A. Narukawa: The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions, Advances in Math. 189 (2) (2004), 247-267.

[Nis] M. Nishizawa: An elliptic analogue of the multiple gamma function, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001), 7411-7421.

[Shin1] T. Shintani: On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Section IA 24 (1977), 167-199.

[Shin2] T. Shintani: A proof of the classical Kronecker limit formula, Tokyo J. Math. 3 (1980), 191-199.

[Shib] G. Shibukawa: Bilateral zeta functions and their applications, preprint.